Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 1

8 mai 2023

Zone A après-midi | **Zone B** matin | **Zone C** après-midi

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

2223 – 7116

15 pages

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

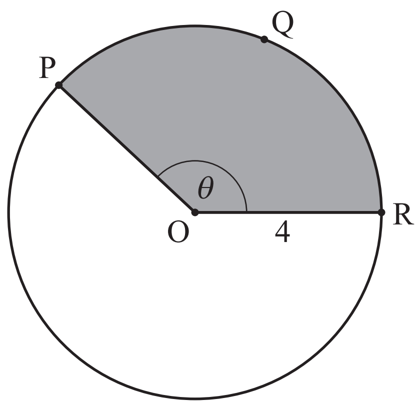
Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre un cercle de centre O et dont le rayon mesure $4\,\mathrm{cm}$.

la figure n'est pas à l'échelle



Les points P, Q et R sont situés sur la circonférence du cercle et $\mathrm{P\hat{O}R} = \theta$, où θ est mesuré en radians.

La longueur de l'arc PQR est de $10\,\mathrm{cm}$.

(a) Trouvez le périmètre du secteur ombragé. [2]

(b) Trouvez θ. [2]

(c) Trouvez l'aire du secteur ombragé. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

2. [Note maximale : 5]

Une fonction f est définie par $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$, où $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$.

(a) La représentation graphique de $y = f(x)$ a une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

Écrivez l'équation de

(i) l'asymptote verticale ;

(ii) l'asymptote horizontale. [2]

(b) Trouvez les coordonnées du point où la représentation graphique de $y = f(x)$ croise

(i) l'axe des ordonnées ;

(ii) l'axe des abscisses. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

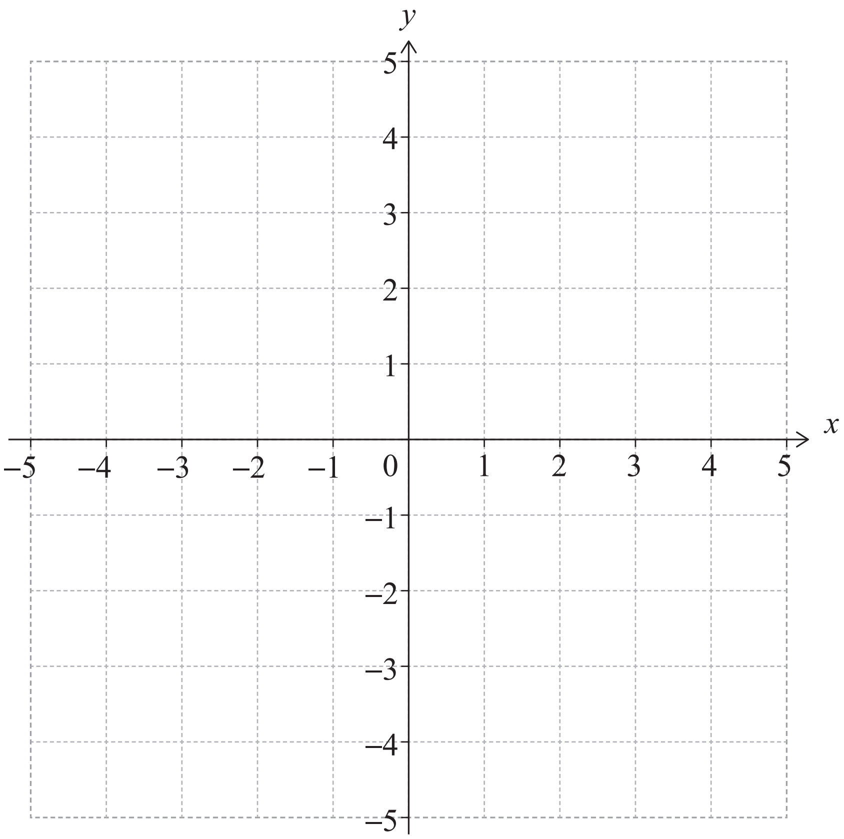
. . . .

. . . .

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

(c) Sur le système d'axes suivant, esquissez la représentation graphique de $y = f(x)$, en montrant toutes les caractéristiques trouvées dans les parties (a) et (b). [1]



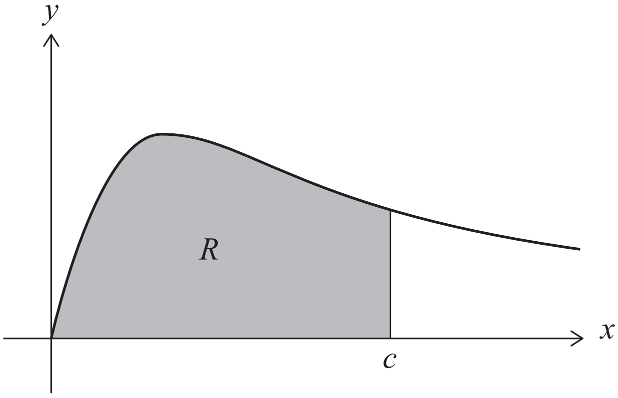
3. [Note maximale : 5]

Les événements A et B sont tels que $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}25$ et $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}55$.

Trouvez $\mathrm{P}(B)$.

4. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre une partie de la représentation graphique de $y = \frac{x}{x^2+2}$ pour $x \geq 0$.



La région ombragée R est délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et la droite $x = c$.

L'aire de R est $\ln 3$.

Trouvez la valeur de c.

5. [Note maximale : 7]

Les fonctions f et g sont définies pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b\text{, où } a,\ b \in \mathbb{Z}$$

$$g(x) = x^2 + x + 3\,.$$

Trouvez les deux fonctions possibles f telles que $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 14x + 15$.

6. [Note maximale : 5]

La fonction de densité f d'une variable aléatoire continue X est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & a \le x \le 3a \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

où a est un nombre réel positif.

(a) Indiquez $\mathrm{E}(X)$ en fonction de a. [1]

(b) Utilisez l'intégration pour trouver $\mathrm{Var}(X)$ en fonction de a. [4]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. [Note maximale : 7]

Utilisez la récurrence pour prouver que $\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ pour tout entier $n \geq 1$.

8. [Note maximale : 7]

Les fonctions f et g sont définies par

$$f(x) = \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$g(x) = \tan x,\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}.$$

Les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ se croisent en un point P dont l'abscisse est k, où $0 < k < \frac{\pi}{2}$.

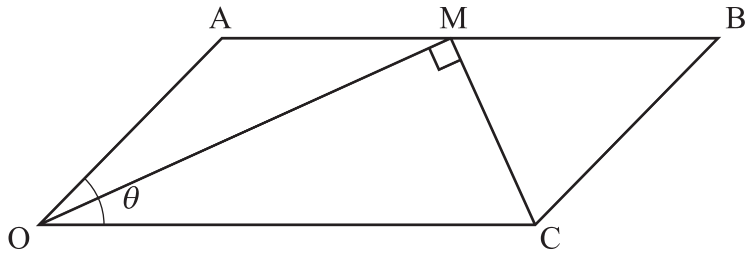
(a) Montrez que $\cos^2 k = \sin k$. [1]

(b) À partir de là, montrez que la tangente à la courbe $y = f(x)$ en P et la tangente à la courbe $y = g(x)$ en P se croisent en angle droit. [3]

(c) Trouvez la valeur de $\sin k$. Donnez votre réponse sous la forme $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, où a, $c \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^+$. [3]

9. [Note maximale : 9]

Le diagramme suivant montre un parallélogramme OABC tel que $\vec{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\vec{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{c}$ et $|\boldsymbol{c}| = 2|\boldsymbol{a}|$, où $|\boldsymbol{a}| \neq 0$.



L'angle entre $\vec{\mathrm{OA}}$ et $\vec{\mathrm{OC}}$ est θ, où $0 < \theta < \pi$.

Le point M se situe sur $[\mathrm{AB}]$ tel que $\vec{\mathrm{AM}} = k\vec{\mathrm{AB}}$, où $0 \leq k \leq 1$ et $\vec{\mathrm{OM}} \bullet \vec{\mathrm{MC}} = 0$.

(a) Exprimez $\vec{\mathrm{OM}}$ et $\vec{\mathrm{MC}}$ en fonction de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$. [2]

(b) À partir de là, utilisez une méthode vectorielle pour montrer que $|\boldsymbol{a}|^2 (1-2k)(2\cos\theta - (1-2k)) = 0$. [3]

(c) Trouvez la plage de valeurs pour θ telles qu'il y a deux positions possibles pour M. [4]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

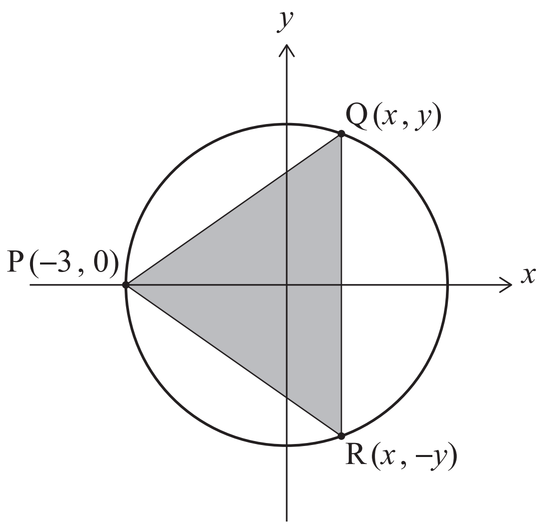
Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 14]

Un cercle d’équation $x^2 + y^2 = 9$ est centré au point $(0, 0)$ et son rayon mesure 3 unités.

Un triangle, PQR, est inscrit dans le cercle et ses sommets sont $\mathrm{P}(-3, 0)$, $\mathrm{Q}(x, y)$ et $\mathrm{R}(x, -y)$, où Q et R sont des points variables du premier et du quatrième quadrant respectivement. Ceci est représenté dans le diagramme suivant.



(a) Pour le point Q, montrez que $y = \sqrt{9 - x^2}$. [1]

(b) À partir de là, trouvez une expression pour A, l’aire du triangle PQR, en fonction de x. [3]

(c) Montrez que $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \dfrac{9 - 3x - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$. [4]

(d) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez l’ordonnée du point R telle que A est un maximum. [6]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 22]

Considérez le nombre complexe $u = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

(a) En trouvant le module et l'argument de u, montrez que $u = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. [3]

(b) (i) Trouvez le plus petit entier positif n tel que u^n est un nombre réel.

(ii) Trouvez la valeur de u^n lorsque n prend la valeur trouvée dans la partie (b)(i). [5]

(c) Considérez l'équation $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$, où $z \in \mathbb{C}$.

(i) Sachant que u est une racine de $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$, trouvez les autres racines.

(ii) En utilisant une transformation appropriée de z à w, ou autrement, trouvez les racines de l'équation $1 + 5w + 10w^2 + 12w^3 = 0$, où $w \in \mathbb{C}$. [9]

(d) Considérez l'équation $z^2 = 2z^*$, où $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

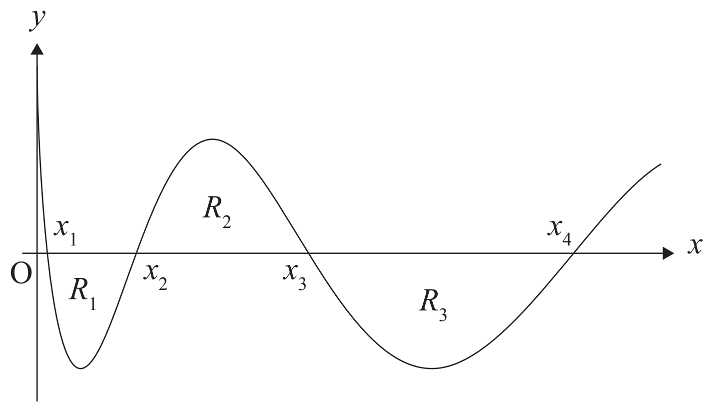
En exprimant z sous la forme $a + b\mathrm{i}$, trouvez les racines de l'équation. [5]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 17]

(a) En utilisant un changement de variable approprié, montrez que $\int \cos\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$. [6]

Le diagramme suivant montre une partie de la courbe $y = \cos\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$.



La courbe croise l’axe des abscisses en x_1, x_2, x_3, x_4, ….

Le $n^{ième}$ point d’intersection de la courbe avec l’axe des abscisses, x_n, est donné par $x_n = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$, où $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Écrivez une expression similaire pour x_{n+1}. [1]

Les régions délimitées par la courbe et l’axe des abscisses sont dénotées par R_1, R_2, R_3, …, tel qu’illustré dans le diagramme ci-dessus.

(c) Calculez l’aire de la région R_n.

Donnez votre réponse sous la forme $kn\pi$, où $k \in \mathbb{Z}^+$. [7]

(d) À partir de là, montrez que les aires des régions délimitées par la courbe et l’axe des abscisses, R_1, R_2, R_3, …, forment une suite arithmétique. [3]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.